Étude de Gamma sur la droite réelle (228, 229, 239, 244)

Gourdon p. 315 et Rombaldi p. 364-366

prop 1 : La fonction Γ est bien définie et $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*})$

démo :

* Bien définie :

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$

$t \mapsto 0^+$: $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$ donc $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$ converge puisque $x-1<1$

$t \mapsto +\infty$: $t^{x-1}e^{-t} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ converge.

* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*})$:

- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est mesurable
- $\forall t \in]0,+\infty[$, $x \mapsto t^{x-1}e^{-t} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*})$
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$

$$\left|\frac{\partial^k (t^{x-1}e^{-t})}{\partial x^k}\right| = \left|\frac{\partial^k (e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t})}{\partial x^k}\right| = |\ln(t)|^k t^{x-1}e^{-t}$$

$$\leq g_k(t) = \begin{cases} |\ln(t)|^k t^{a-1} & \text{pour } t \in]0,1] \\ |\ln(t)|^k t^{b-1}e^{-t} & \text{pour } t \in [1,+\infty[\end{cases}$$

Ainsi par le thm de dérivation sous le signe intégrale, on a que

$$\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*}) \text{ et } \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty \ln(t)^k t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

prop 2 : La fonction Γ vérifie l'équation fonctionnelle : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

démo : On a pour $x>0$ et $0<\varepsilon<R$:

$$\int_\varepsilon^R t^x e^{-t}\,dt = [-t^x e^{-t}]_\varepsilon^R + x\int_\varepsilon^R t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

Or quand $\varepsilon \to 0$ et $R \to +\infty$, on obtient :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\Gamma(x).$$

cor 3 : La fonction Γ vérifie $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

démo : Tout d'abord, on a $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) \underset{\text{prop 2}}{=} n\Gamma(n) \underset{n=(n-1)+1}{=} n(n-1)\Gamma(n-1) = \_\_\_\_ = n(n-1)\_\_1\,\Gamma(1) = n!$

cor 4 : On a $\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$

démo : Par la prop 2, on a $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ pour $x>0$.

donc $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \underset{0^+}{\sim} \frac{\Gamma(1)}{x} = \frac{1}{x}$

prop 5 : la fonction Γ est convexe et log-convexe

démo :

* Convexité :

Par la prop 1, on a $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\ln(t)^2\, t^{x-1} e^{-t}}_{>0 \text{ et positivité de l'intégrale}} \, dt > 0$

* Log-convexité :

• On remarque que : $\log(\Gamma(x))'' = \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)' = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma(x)^2}$

On veut montrer que $\forall x>0$, $\log(\Gamma(x))'' \geq 0$ ie $\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2 \geq 0$

Pour cela, on a

$$(\Gamma'(x))^2 = \left(\int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-t}\, t^{x-1}\, dt\right)^2 = \left(\int_0^{+\infty} \left(\ln(t) e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{x-1}{2}}\right)\left(t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}\right) dt\right)^2$$

$$\overset{C.S}{\leq} \left(\int_0^{+\infty} \ln(t)^2 e^{-t} t^{x-1}\, dt\right)\left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt\right)$$

$$= \Gamma''(x)\,\Gamma(x)$$

Ainsi $\Gamma''(x)\Gamma(x) \geq \Gamma'(x)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

• Pour $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in]0,1[$ on a

$$\Gamma(\theta x + (1-\theta)y) = \int_0^{+\infty} t^{\theta x + (1-\theta)y - 1} e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} t^{\theta(x-1)}\, t^{(1-\theta)(y-1)}\, e^{-t}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(t^{x-1} e^{-t}\right)^{\theta} \left(t^{y-1} e^{-t}\right)^{(1-\theta)} dt$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt\right)^{\theta} \left(\int_0^{+\infty} t^{y-1} e^{-t}\, dt\right)^{(1-\theta)} \quad \text{avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \theta + 1 - \theta = 1.$$

$$= \Gamma(x)^{\theta}\, \Gamma(y)^{(1-\theta)}$$

Comme la fonction log est croissante, on a

$$\log(\Gamma(\theta x + (1-\theta)y)) \leq \log(\Gamma(x)^{\theta}\, \Gamma(y)^{1-\theta}) = \theta \log(\Gamma(x)) + (1-\theta)\log(\Gamma(y)).$$